Jacobi 27/11/17

$Dx^{(m+1)} = (L+U)x^{(m)} + b \quad , \quad m=0,1,2,\dots \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

ή $\quad x^{(m+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1}b \quad , \quad m=0,1,2,\dots \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Gauss - Seidel

$(D-L)x^{(m+1)} = Ux^{(m)} + b \quad m=0,1,2,\dots \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

ή $\quad x^{(m+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(m)} + (D-L)^{-1}b \quad , \quad m=0,1,2,\dots \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Γενική επαναληπτική μέθοδος

Θεωρούμε το διαχωρισμό $A=M-N$, όπου M αντιστρέψιμος. Τότε

$Ax=b \Leftrightarrow (M-N)x=b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

Αυτό μας οδηγεί στην επαν. μέθοδο $Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$

ή $\quad x^{(m+1)} = M^{-1}Nx^{(m)} + M^{-1}b$

$M_J = D, N_J = L+U, \quad M_{GS} = D-L, \quad N_{GS} = U$

Ο πίνακας $G = M^{-1}N$ λέγεται επαναληπτικός πίνακας κ' παίζει τον κύριο ρόλο για τη σύγκλιση

$x^{(m+1)} - x = G(x^{(m)} - x) \quad , \quad m=0,1,2,\dots \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Επαγωγικά, $x^{(m)} - x = G^m(x^{(0)} - x)$

Θεωρώ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

$\|x^{(m)} - x\| = \|G^{(m)}(x^{(0)} - x)\| \leq \|G^m\| \, \|x^{(0)} - x\|$

$\lim_{m\to\infty}(x^{(m)} - x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\|x^{(m)} - x\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\|G^{(m)}\| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} G^m = 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω x η λύση του $Ax=b$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) Η επαναληπτική μέθοδος που βασίζεται στον $A=M-N$:

$x^{(m+1)} = M^{-1}Nx^{(m)} + M^{-1}b \Leftrightarrow x^{(m+1)} = Gx^{(m)} + c$,

$m=0,1,2,\dots \; x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, συγκλίνει στη λύση x

β) $\rho(G) < 1$

γ) Υπάρχει φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|G\| < 1$

δ) $\lim_{m\to\infty} G^m = 0$

Η $\|G\| < 1$ αποτελεί ικανό κριτήριο

Η $\rho(G) < 1$ αποτελεί ικανό κ' αναγκαίο κριτήριο

Επίσης αποτελεί κ' κριτήριο σύγκρισης.

Αν F και G δύο επαναλ. πίνακες δύο μεθόδων για τη λύση του $Ax = b$ και $\rho(G) < \rho(F)$, τότε η επαναλ. μέθοδος του G συγκλίνει ταχύτερα από εκείνη του F.

Κριτήριο τερματισμού της διαδικασίας, δεν μπορεί να είναι $\|x^{(m)} - x\| \leq \varepsilon$ διότι δεν ξέρουμε το x. Αντί αυτού παίρνουμε $\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| \leq \varepsilon$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$\|G_J\|_1 = \|G_J\|_\infty = 1 \Rightarrow$ Δεν μπορούμε ν' αποφανθούμε

$$\det(G_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\lambda =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{2}/2 \\ \lambda_3 = -\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$\rho(G_J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow$ συγκλίνει

$\longrightarrow$

$$G_{GS} = (D-L)^{-1} U = \begin{bmatrix} 2 & & \\ -1 & 2 & \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & & & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \\ 1/8 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\|G_{GS}\|_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1$$

$\|G_{GS}\| = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ η Gauss-Seidel συγκλίνει

$$\det(G_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{16}\right] =$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) =$$

$$= -\lambda^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \rho(G_{GS}) = \frac{1}{2} < 1$$

$\rho(G_{GS}) = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho(G_J) \Rightarrow$ Η G-S συγκλίνει ταχύτερα

$\rho(G_J) = \rho(G_J)^2 \Rightarrow$ Η G-S συγκλίνει με διπλάσια ταχύτητα της Jacobi

$$x^{(m)} - x = G^{(m)}(x^{(0)} - x)$$

"ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ"

Αποτελεί κλάδο της Πολυωνυμικής προσέγγισης

Πρόβλημα: Έστω ότι η συνάρτηση f δίνεται στα $n+1$ σημεία
$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, (x_i, f_i), $i=0,1,2,\ldots n$
Να βρεθεί απλή συνάρτηση ϕ που θα περνάει κοντά από τα $n+1$ αυτά σημεία.
Απλή με την έννοια ότι έχει καλές ιδιότητες και μελετάται εύκολα, π.χ. Πολυώνυμα, Τμηματικά πολυώνυμα, τριγωνομ. συναρτ., εκθετικές συναρτήσεις

Παρεμβολή: Να βρεθεί απλή ϕ που θα περνάει από τα σημεία (x_i, f_i), δηλαδή $\phi(x_i) = f_i$, $i=0,1,2,\ldots n$
Πολυωνυμική παρεμβολή ϕ πολυώνυμο